Liceo 4 Isaura Dinator de Guzmán
Departamento de Matemática y Física
Profesora Georgina Baeza

Asignatura diferenciada	**: funciones y procesos infinitos**
Profesora	: Georgina Baeza
Correo	**:** georgina.baeza@liceoisauradinator.cl
Objetivo a trabajar	**:** CMa. Plantear algunos problemas geométricos, de probabilidades o de matemáticas financieras que involucren la noción de sumatoria; introducción del símbolo sumatoria. Propiedades de linealidad, asociatividad y propiedad telescópica. Aplicar al cálculo de algunas sumas concretas, por ejemplo, de los primeros n números naturales, de sus cuadrados, de los números impares. CMb. Determinar y calcular Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos. Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos, de interés compuesto, de decaimiento radioactivo, de poblaciones.

Notas de la profesora:

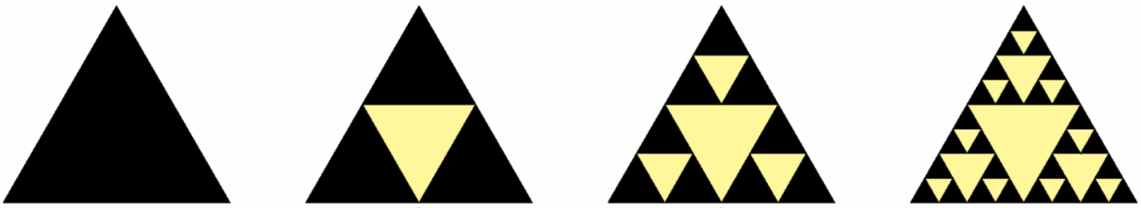
Estimadas, la elaboración de este pequeño material es para apoyar su aprendizaje y fomentar su autonomía en cuanto a formar sus conocimientos puesto que, debido a las circunstancias nacionales y mundiales, estamos impedidas de poder reunirnos y estudiar los objetivos propuestos para este año. Es por esto que esta guía está compuesta por:

- *Contenidos*
- *Ejercicios resueltos*
- *Ejercicios propuestos*

Junto a esta guía se adjuntará otra para ser evaluada. Ante cualquier duda, podrán comunicarse conmigo a través de mi correo electrónico georgina.baeza@liceoisauradinator.cl. Además, en ese mismo correo deberán enviar el material resuelto para ser evaluado, tendrán plazo hasta el día ***3 de abril del 2020.***

1. Sucesiones de números reales. Término general

En las siguientes figuras observa el proceso que lleva a la creación de nuevos triángulos negros.



1 2 3 4

Siguiendo con el proceso, *¿cuántos triángulos negros tendrá la figura 5?* Y, en general, *¿la figura n?*

Figura	Nº de triángulos
1	$1 = 3^0$
2	$3 = 3^1$
3	$9 = 3^2$
4	$27 = 3^3$
5	$81 = 3^4$

En la figura enésima, el número de triángulos negros es 3^{n-1}. Así, por ejemplo, a partir de la fórmula anterior podemos afirmar que en la figura 10 se obtendrán $3^{10-1} = 3^9 = 19.683$ triángulos negros.

La secuencia ordenada de números que hemos obtenido en la tabla anterior 1, 3, 9, 27, 81, 243, … es una *sucesión de números reales* y a la expresión $a_n = 3^{n-1}$ se le llama *término general*.

- Una ***sucesión de números reales*** $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots}$ es una secuencia ordenada de infinitos números reales.
- Cada uno de los números de la misma (a_1, a_2, a_3, …) se denomina ***término*** de la sucesión.
- Los números naturales 1, 2, 3, … se llaman ***índices,*** e indican el lugar que ocupa el término en la sucesión. A cada número natural (*índice*) se le hace corresponder un número real (*término*).
- Al término $\boldsymbol{a_n}$ se le llama ***término n-ésimo*** o ***término general***, y es la expresión que permite conocer el valor de un determinado término si se conoce previamente el lugar que ocupa en la misma.
- Se acostumbra representar la sucesión por el conjunto ordenado de sus términos, con o sin paréntesis, o bien por su término general.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots \text{ o bien } (a_n),\ n \chi \mathbf{N}$$

Ejemplo.- Halla el término general de las siguientes sucesiones.

a) El conjunto ordenado de los números impares.

b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, …

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

d) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

a) $a_n = 2n - 1$ b) $b_n = n^2 - 1$ c) $c_n = \frac{1}{n+1}$ *d)* $d_n = \frac{n-1}{n}$

-

Liceo 4 Isaura Dinator de Guzmán
Departamento de Matemática y Física
Profesora Georgina Baeza

Ejemplo.- Escribir los seis primeros términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

$a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3$ $\quad$ $a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$

$a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$ $\quad$ $a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

$a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ $\quad$ $a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$

La obtención del término general de una sucesión puede entrañar una notable dificultad. No obstante, se estudiará más adelante dos clases de tipos de sucesiones particulares en las que el hallazgo del término general es sencillo.

EJERCICIOS

1. Escribe los términos primero, segundo, tercero, décimo y vigésimo de las sucesiones dadas por los términos generales siguientes.

   a) $a_n = -3n + 5$ $\qquad$ b) $b_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ $\qquad$ c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

   a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, … $\qquad$ b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … $\qquad$ c) 1, 8, 27, 64, 125, …

   d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$ $\qquad$ e) $4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}$ $\qquad$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}$

2. Sucesiones crecientes y decrecientes

- Considera la sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

  Se observa que cada término es menor o igual que el término siguiente. En este caso se dice que la sucesión es *monótona creciente.*

> Una sucesión **(a_n)** es ***monótona creciente*** cuando cada término es menor o igual que el término siguiente; es decir:
>
> $$\boldsymbol{a_1 \Sigma a_2 \Sigma a_3 \Sigma \ldots \Sigma a_n \Sigma a_{n+1} \Sigma \ldots}$$
>
> O abreviadamente, si $\boldsymbol{a_n \Sigma a_{n+1}}$ cualquiera que sea el número natural n.

- Consideremos ahora la sucesión de los inversos de los cuadrados de los números naturales: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

  Vemos ahora que cada término es mayor o igual que el siguiente. En este caso se dice que la sucesión es *monótona decreciente.*

> Una sucesión **(a_n)** es ***monótona decreciente*** cuando cada término es mayor o igual que el término siguiente; es decir:
>
> $$\boldsymbol{a_1 \Sigma a_2 \Sigma a_3 \Sigma \ldots \Sigma a_n \Sigma a_{n+1} \Sigma \ldots}$$
>
> O abreviadamente, si $\boldsymbol{a_n \Sigma a_{n+1}}$ cualquiera que sea el número natural n.

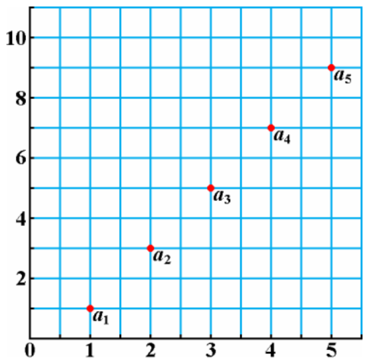
- Hay sucesiones que pueden no ser monótonas crecientes ni decrecientes.

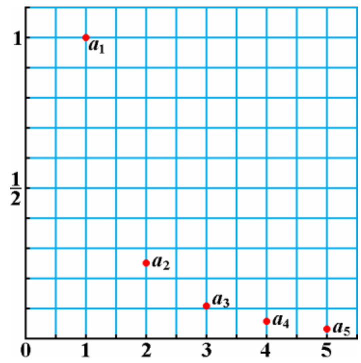
  Por ejemplo, la sucesión de término general $a_n = \dfrac{(-1)^n (n+2)}{n}$, cuyos primeros términos son:

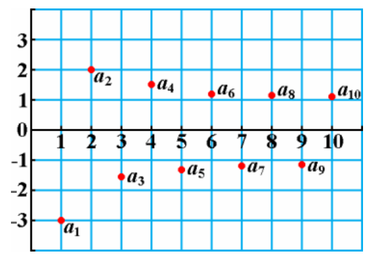
  $$-3,\ 2,\ -\frac{5}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{7}{5},\ \ldots$$

-

Observa las representaciones gráficas de las anteriores sucesiones:







$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ — Monótona creciente

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$ — Monótona decreciente

$-3, 2, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{4}$ — No monótona creciente ni decreciente

<u>Ejemplo.-</u> Averigua si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes.

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots$

b) La sucesión de término general $a_n = n^3$.

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

d) $3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$

a) Monótona decreciente.

b) Monótona creciente.

c) No es monótona creciente ni decreciente.

d) Monótona creciente y monótona decreciente (sucesión constante).

EJERCICIOS

<u>3.</u> Estudia si son monótonas crecientes o decrecientes las siguientes sucesiones dadas por su término general. Te puede ayudar la representación gráfica de las sucesiones.

a) $a_n = \frac{1}{n}$ *b)* $b_n = 0$ c) $c_n = \frac{n}{n+1}$ d) $d_n = (-2)^{n+1}$

e) $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ f) $f_n = n - 2^n$ g) $g_n = (-1)^n \cdot (n^3 + 1)$ h) $h_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

<u>3.</u> <u>SUCESIONES ACOTADAS</u>

- Considera la sucesión de término general $a_n = \frac{n}{n+1}$, cuyos primeros términos son $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

  Observa que todos sus términos son menores o iguales que 1. Se dice entonces que la sucesión está *acotada superiormente*, y que 1 es una *cota superior* (también son cotas superiores todos los números mayores que 1).

-

Una sucesión **(a_n)** está ***acotada superiormente*** si todos sus términos son menores o iguales que un número real ***k***; es decir:

$$a_1 \,\Sigma\, k,\ a_2 \,\Sigma\, k,\ a_3 \,\Sigma\, k,\ \ldots\ a_n \,\Sigma\, k,\ \ldots$$

O abreviadamente, si $a_n \,\Sigma\, k$ cualquiera que sea el número natural *n*.

Se dice que ***k*** es una ***cota superior*** de la sucesión.

- También se verifica que todos los términos de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ son mayores o iguales que $\frac{1}{2}$. Se

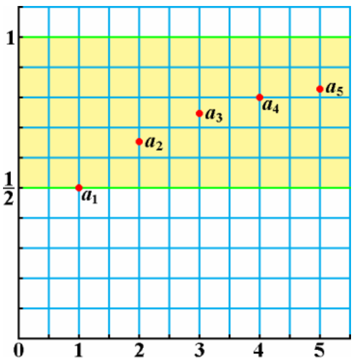
dice entonces que la sucesión está *acotada inferiormente,* y que 1/2 es una *cota inferior* (también son cotas inferiores todos los números menores que 1/2).

> Una sucesión **(a_n)** está ***acotada inferiormente*** si todos sus términos son mayores o iguales que un número real ***h***; es decir:
>
> $$a_1 \Sigma h, a_2 \Sigma h, a_3 \Sigma h, \ldots a_n \Sigma h, \ldots$$
>
> O abreviadamente, si $a_n \Sigma h$ cualquiera que sea el número natural *n*.
>
> Se dice que ***h*** es una ***cota inferior*** de la sucesión.

- Como la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ está acotada superior e inferiormente, se dice que es una *sucesión acotada*.

> Una sucesión **(a_n)** está ***acotada*** si está acotada superior e inferiormente.

Gráficamente:

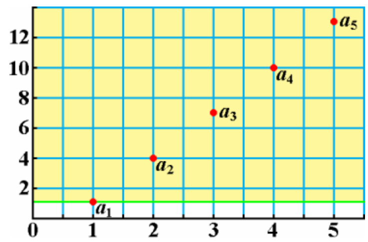


La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ está acotada superiormente por 1 e inferiormente por $\frac{1}{2}$.

Por tanto, se dice que esta sucesión está acotada.

<u>Ejemplo.-</u> ¿Está acotada la sucesión de término general $a_n = 3n - 2$?

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$, $a_6 = 16$, …



Como $1 \leq 4 \leq 7 \leq 10 \leq 13 \leq 16 \leq \ldots$, 1 es cota inferior, pero no tiene cota superior. Por tanto, está acotada inferiormente, pero no está acotada.

EJERCICIOS

4. Estudia la acotación de las siguientes sucesiones dadas por su término general. Te puede ayudar la representación

gráfica de las sucesiones.

a) $a_n = 2n$ b) $b_n = -4n + 3$ c) $c_n = \frac{n+1}{n}$ d) $d_n = \frac{1}{n}$ e) $e_n = (-1)^n$ f) $f_n = (-1)^n \cdot n$

-

Liceo 4 Isaura Dinator de Guzmán
Departamento de Matemática y Física
Profesora Georgina Baeza

OPERACIONES CON SUCESIONES

- Se define la ***sucesión producto de un número real k por la sucesión*** (a_n) como aquella sucesión que asocia a cada número natural n el valor ka_n:

$$k(a_n) = (ka_n)$$

- Se define la ***sucesión suma de las sucesiones*** (a_n) ***y*** (b_n) como aquella sucesión que asocia a cada número natural n el valor $a_n + b_n$:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

- Se define la ***sucesión producto de las sucesiones*** (a_n) ***y*** (b_n) como aquella sucesión que asocia a cada número natural n el valor $a_n \bullet b_n$:

$$(a_n) \bullet (b_n) = (a_n \bullet b_n)$$

Ejemplo.- Dadas las sucesiones $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ y $(b_n) = (10, 11, 13, 16, 20, \ldots)$, escribe los primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $3(a_n)$ b) $(a_n) + (b_n)$ c) $(a_n) \cdot (b_n)$

a) $3(a_n) = (3a_n) = (3, 9, 15, 21, 27, \ldots)$

b) $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (11, 14, 18, 23, 29, \ldots)$

c) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = (10, 33, 65, 112, 180, \ldots)$

Ejemplo.- Dadas las sucesiones de término general $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n + 2$, calcula:

a) $2(a_n)$ b) $(a_n) + (b_n)$ c) $(a_n) \cdot (b_n)$

a) $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$

b) $\left(\frac{1}{n}\ (n+2)\right) = \left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right) = \left(4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \frac{36}{5}, \frac{49}{6}, \ldots\right)$

c) $\left(\frac{n+2}{n}\right) = \left(3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \ldots\right)$

EJERCICIOS

4. Dadas las sucesiones $(a_n) = (4, 6, 9, 18, 23, \ldots)$ y $(b_n) = (-1, 3, -2, 4, -3, 5, \ldots)$, escribe los primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $2(a_n)$ b) $(a_n) + (b_n)$ c) $(a_n) \cdot (b_n)$

5. Dadas las sucesiones de término general $a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = n^2$ y $c_n = n + 1$, realiza las siguientes operaciones.

a) $(b_n) - (c_n)$ b) $(a_n) \cdot (b_n)$ c) $(b_n) \cdot (c_n)$ d) $(a_n) \cdot [(b_n) + (c_n)]$ e) $(b_n) + 3(c_n)$

5. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Consideremos las siguientes sucesiones: 2, 5, 8, 11, 14, …; 6, 2, –2, –6, –10, …; –3, –1, 1, 3, 5, …

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior sumando o restando un número fijo; estas sucesiones se llaman *progresiones aritméticas*.

> Una ***progresión aritmética*** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo, llamado ***diferencia,*** y que representamos por ***d*:**
>
> $$\boldsymbol{a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} + d}$$

5.1. Término general

Podemos hallar fácilmente el término general de estas sucesiones en función de los términos que tengamos:

- Conocidos el primer término $\boldsymbol{a_1}$ y la diferencia ***d.***

  Consideremos la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ de diferencia d, y expresemos todos los términos en función de a_1 y de d. Teniendo en cuenta la definición de progresión aritmética, se obtiene:

  $a_2 = a_1 + d$

  $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

  $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

  $a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

  … … … …

  $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$

  Por tanto, la expresión del término general de una progresión aritmética es: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}}$

- Conocidos el término k-ésimo $\boldsymbol{a_k}$ y la diferencia ***d.***

  De forma análoga, obtenemos que si $\boldsymbol{k < n}$, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)d}}$

Ejemplo.- Halla el término general de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, 14, …

$a_1 = 2,\ d = 3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$

Ejemplo.- Halla el término general de una progresión aritmética sabiendo que $a_{11} = 35$ y $d = 4$.

1er método:

$a_{11} = 35,\ d = 4 \Rightarrow a_n = a_{11} + (n-11)d = 35 + (n-11)\cdot 4 = 35 + 4n - 44 \Rightarrow a_n = 4n - 9$

2º método:

Calculemos previamente el primer término a_1:

$a_{11} = a_1 + (11-1)\cdot d \Rightarrow 35 = a_1 + (11-1)\cdot 4 \Rightarrow 35 = a_1 + 10\cdot 4 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = 35 - 40 = -5$

Así, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_n = -5 + (n-1)\cdot 4 = -5 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n - 9$

Ejemplo.- Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética sabiendo que $a_5 = -1/2$ y $a_{13} = 7/2$.

Para $n = 13$ y $k = 5$, obtenemos: $a_{13} = a_5 + (13-5)d \Rightarrow \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + 8d \Rightarrow 4 = 8d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

Para $n = 5$ tenemos: $a_5 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow -\frac{1}{2} = a_1 + 4\cdot\frac{1}{2} = a_1 + 2 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}$

Liceo 4 Isaura Dinator de Guzmán
Departamento de Matemática y Física
Profesora Georgina Baeza

5.2. Interpolación de medios aritméticos

Interpolar n medios aritméticos entre dos números conocidos ***a*** y ***b*** consiste en construir una progresión aritmética de la forma $\boldsymbol{a, m_1, m_2, \ldots, m_n, b}$. Los números $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se llaman ***medios aritméticos.***

Para resolver este problema basta conocer la diferencia que ha de tener la progresión, la cual se deduce sin más que tener en cuenta dos cosas:

- La sucesión tiene $n + 2$ términos.
- El primer término a_1 es a y el término a_{n+2} es b: $a_1 = a$, $a_{n+2} = b$.

Ejemplo.- Interpolar cinco medios aritméticos entre 4 y 22.

Debemos completar los espacios punteados para que la sucesión 4, …, …, …, …, …, 22 sea una progresión aritmética.

El número de términos es $n + 2 = 5 + 2 = 7$, y con la expresión del término general $a_n = a_1 + (n - 1)d$ hallamos la diferencia:

$$a_7 = a_1 + (7-1)d \Rightarrow 22 = 4 + 6d \Rightarrow 22 - 4 = 6d \Rightarrow 18 = 6d \Rightarrow d = 3$$

La progresión aritmética es, por tanto: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

EJERCICIOS

7. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla su término general.
   a) 20, 17, 14, 11, 8, … b) –9, –2, 5, 12, 19, … c) 4, 8, 16, 32, 64, … d) 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, …
8. El quinto término de una progresión aritmética es 22 y la diferencia 5. Halla el término general.
9. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_1 = 9$ y $a_{60} = 422$. Halla su término general.
10. Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética en la que el tercer término es 24 y el décimo 66.
11. Halla el término general de una progresión aritmética de la cual se conocen los términos $a_5 = 1$ y $a_{83} = -38$.
12. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.
13. Halla la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son términos consecutivos de una progresión aritmética de diferencia 3.
14. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 3?
15. a) Interpola tres medios aritméticos entre 3 y –13.
    b) Interpola tres medios aritméticos entre 2 y 3.
    c) Interpola cuatro medios aritméticos entre 12 y 1.

5.3. Suma de términos consecutivos

- En ocasiones nos referiremos a la progresión formada por los n primeros términos, tratándose en estos casos de una progresión ***limitada.*** Consideremos la progresión aritmética limitada formada por los siete primeros múltiplos de 5:

$a_1 = 5$ $a_2 = 10$ $a_3 = 15$ $a_4 = 20$ $a_5 = 25$ $a_6 = 30$ $a_7 = 35$

$20 + 20 = 40$
$15 + 25 = 40$
$10 + 30 = 40$
$5 + 35 = 40$

-

Podemos observar que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos, es decir, es $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = a_4 + a_4 = 40$.

En general, dada una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de diferencia d, se tiene que:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$a_{h+1} + a_{n-h} = (a_1 + hd) + (a_n - hd) = a_1 + a_n$$

> En toda progresión aritmética limitada, ***$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$***, la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos:
>
> $$\boldsymbol{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots}$$

- Denotemos por S_7 la suma de los siete primeros términos de la progresión anterior: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.

Una forma de hallarla es mediante el procedimiento inventado por el matemático Carl Frederich Gauss (1777-1855) a la edad de 10 años, consistente en escribir la suma dos veces, invirtiendo los términos en una de ellas:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S_7 = & 5 & + & 10 & + & 15 & + & 20 & + & 25 & + & 30 & + & 35 \\ S_7 = & 35 & + & 30 & + & 25 & + & 20 & + & 15 & + & 10 & + & 5 \\ \hline 2S_7 = & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 \end{array}$$

de donde: $\quad 2S_7 = 7 \cdot 40 = 7 \cdot (5 + 35) \Rightarrow \quad S_7 = \dfrac{7 \cdot (5 + 35)}{2} = 140$

Siguiendo el procedimiento utilizado por Gauss, podemos hallar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \dots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \dots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \end{array}$$

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$, se tiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow \quad S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

> La suma de los ***n*** primeros términos de una progresión aritmética, ***$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$***, vale:
>
> $$\boldsymbol{S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}}$$

Ejemplo.- Calcula la suma de los 500 primeros números pares.

La sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, 10, … es una progresión aritmética donde $a_1 = 2$ y $d = 2$.

El término 500 de esta progresión es $a_{500} = a_1 + (500 - 1)d = 2 + 499 \cdot 2 = 1.000$

Por tanto, la suma de los 500 primeros números pares vale:

$$S_{500} = \frac{500(a_1 + a_{500})}{2} = \frac{500(2 + 1.000)}{2} = 250 \cdot 1.002 = 250.500$$

-

EJERCICIOS

16. Calcula la suma de los números que se indican.
    a) De los 25 primeros términos de la sucesión 3, 8, 13, …
    b) De los 40 primeros términos de la sucesión 1/2, 5/8, 3/4, …
    c) De todos los números pares de dos cifras.
    d) De todos los números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 6.
17. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética –11, –4, 3, 10, … hay que sumar para obtener como resultado 570?
18. Halla la expresión de la suma de los *n* primeros números impares. A partir de esta expresión, calcula la suma de los 125 primeros números impares.
19. Fernando estuvo perfeccionando su inglés el verano pasado en Londres. ¿Cuánto dinero llevó si el primer día gastó 270 euros, fue disminuyendo gastos en 9 euros diarios, y el dinero le duró 30 días?
20. Un individuo ha ahorrado durante un año 4.212 euros, ingresando cada mes 42 euros más que el anterior. ¿Cuánto dinero ahorró el primer mes? ¿Cuánto dinero ingresó el último mes?
21. Las cinco cifras que forman un número están colocadas en progresión aritmética. La suma de todas ellas es igual a 25, y la segunda (decenas) es doble de la quinta (decenas de millar). ¿Qué número es este?

6. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Consideremos las siguientes sucesiones: 2, 6, 18, 54, 162, …; 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, …; 3, –3, 3, –3, 3, –3, …

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior multiplicando o dividiendo por un número fijo; estas sucesiones se llaman *progresiones geométricas*.

> Una ***progresión geométrica*** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por un número fijo, llamado ***razón,*** y que representamos por ***r*:**
>
> $$a_2 = a_1 \bullet r,\ a_3 = a_2 \bullet r,\ a_4 = a_3 \bullet r,\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} \bullet r$$

6.1. Término general

Al igual que en el caso de las progresiones aritméticas, podemos deducir una expresión que nos proporciones el término general.

- Conocidos el primer término a_1 y la razón r.

  Consideremos la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ de razón r, y expresemos todos los términos en función de a_1 y de r. Teniendo en cuenta la definición de progresión geométrica, se obtiene:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por tanto, la expresión del término general de una progresión geométrica es: $\boxed{a_n = a_1 \bullet r^{\,n-1}}$

-

- Conocidos el término k-ésimo $\boldsymbol{a_k}$ y la razón $\boldsymbol{r}$.

De forma análoga, obtenemos que si $\boldsymbol{k < n}$, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_k \bullet r^{\,n-k}}}$

Ejemplo.- Halla el término general de la progresión geométrica $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

$a_1 = 1/3,\ r = 3 \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{n-2}$

Ejemplo.- Halla el término general de una progresión geométrica sabiendo que $a_{15} = 162$ y $r = 3$.

1er método:

$a_5 = 162,\ r = 3 \Rightarrow a_n = a_5 \cdot r^{n-5} = 162 \cdot 3^{n-5} = 2 \cdot 3^4 \cdot 3^{n-5} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

2º método:

Calculemos previamente el primer término a_1: $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow 162 = a_1 \cdot 3^4 = a_1 \cdot 81 \Rightarrow a_1 = 2$

Así, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ejemplo.- Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica sabiendo que $a_4 = 8/3$ y $a_9 = -8/729$.

$$a_9 = a_4 \cdot r^{9-4} \Rightarrow -\frac{8}{729} = \frac{8}{3} \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = -\frac{3}{729} = -\frac{1}{243} \Rightarrow r = \sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{3^5}} = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \Rightarrow \frac{8}{3} = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = a_1 \cdot \frac{-1}{27} \Rightarrow a_1 = -72$$

6.2. Interpolación de medios geométricos

Interpolar n medios geométricos entre dos números conocidos ***a*** y ***b*** consiste en construir una progresión geométrica de la forma $\boldsymbol{a, m_1, m_2, \ldots, m_n, b}$. Los números $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se llaman ***medios geométricos.***

Para resolver este problema basta conocer la razón que ha de tener la progresión, la cual se deduce sin más que tener en cuenta dos cosas:

- La sucesión tiene $n + 2$ términos.
- El primer término a_1 es a y el término a_{n+2} es b: $a_1 = a$, $a_{n+2} = b$.

Ejemplo.- Interpolar cuatro medios geométricos entre 128 y 4.

Debemos completar los espacios punteados para que la sucesión 128, …, …, …, …, 4 sea una progresión geométrica.

El número de términos es $n + 2 = 4 + 2 = 6$, y con la expresión del término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ hallamos la razón:

$$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} \Rightarrow 4 = 128 \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{4}{128} = \frac{1}{32} \Rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{2}$$

La progresión es 128, 64, 32, 16, 8, 4.

EJERCICIOS

22. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla su término general.
a) 2, 6, 18, 54, … b) 5, –5, 5, –5, 5, … c) 10, 20, 28, 36, 44, … d) 18, 6, 2, 2/3, 2/9,…

El sexto término de una progresión geométrica de razón 2 es 96. Calcula el término general.

23. En una progresión geométrica se sabe que $a_1 = 2$ y $a_5 = 1/8$. Halla el término general.

24. Halla el término general de una progresión geométrica de la cual se conocen los términos $a_{10} = 20$ y $a_6 = 5$.

25. En una progresión geométrica el quinto término es 81, y el segundo –3. Halla el término general.

26. Halla cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 1/2 y los dos últimos 1/8.

27. a) Interpola tres medios geométricos entre 3 y 48.
b) Interpola dos medios geométricos entre 1/3 y –9.
c) Interpola tres medios geométricos entre 1/16 y 16.

6.3. Producto de términos consecutivos

- Consideremos la siguiente progresión geométrica limitada: 3, 6, 12, 24, 48. Podemos observar en ella que el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los extremos.

$a_1 = 3$ $\quad a_2 = 6$ $\quad a_3 = 12$ $\quad a_4 = 24$ $\quad a_5 = 48$

$12 \cdot 12 = 144$

$6 \cdot 24 = 144$

$3 \cdot 48 = 144$

En general, dada una progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de razón r, se tiene que:

$$a_2 \cdot a_{n-1} = (a_1 \cdot r) \cdot (a_n : r) = a_1 \cdot a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = (a_1 \cdot r^2) \cdot (a_n : r^2) = a_1 \cdot a_n$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{h+1} + a_{n-h} = (a_1 \cdot r^h) \cdot (a_n : r^h) = a_1 \cdot a_n$$

> En toda progresión geométrica limitada, ***$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$***, el producto de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los extremos:
>
> $$\boldsymbol{a_1 \bullet a_n = a_2 \bullet a_{n-1} = a_3 \bullet a_{n-2} = a_4 \bullet a_{n-3} = \ldots}$$

- Si denotamos por P_5 el producto de los cinco primeros términos de la progresión anterior: 3, 6, 12, 24, 48, resulta:

$$\begin{array}{ccccccccccc} P_5 & = & 3 & \cdot & 6 & \cdot & 12 & \cdot & 24 & \cdot & 48 \\ P_5 & = & 48 & \cdot & 24 & \cdot & 12 & \cdot & 6 & \cdot & 3 \\ \hline (P_5)^2 & = & 144 & \cdot & 144 & \cdot & 144 & \cdot & 144 & \cdot & 144 \end{array}$$

de donde: $(P_5)^2 = (144)^5 = (3 \cdot 48)^5 \Rightarrow \quad P_5 = \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = \sqrt{144^5} = \left(\sqrt{144}\right)^5 = 12^5 = 248.832$

En general, siguiendo el procedimiento anterior, podemos hallar el producto (P_n) de los n primeros términos de una progresión geométrica: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Para ello, escribimos el producto de los términos dos veces invirtiendo los términos en uno de ellos y aplicamos la propiedad anterior:

$$\begin{array}{ccccccccccc} P_n & = & a_1 & \cdot & a_2 & \cdot & \ldots & \cdot & a_{n-1} & \cdot & a_n \\ P_n & = & a_n & \cdot & a_{n-1} & \cdot & \ldots & \cdot & a_2 & \cdot & a_1 \\ \hline (P_n)^2 & = & (a_1 \cdot a_n) & \cdot & (a_2 \cdot a_{n-1}) & \cdot & \ldots & \cdot & (a_{n-1} \cdot a_2) & \cdot & (a_n \cdot a_1) \end{array}$$

Como en el segundo miembro hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 \cdot a_n)$, se tiene:

$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) = (a_1 \cdot a_n)^n \Rightarrow (P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \Rightarrow P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

El producto de los $\boldsymbol{n}$ primeros términos de una progresión geométrica, $\boldsymbol{P_n = a_1 \bullet a_2 \bullet a_3 \bullet \ldots \bullet a_n}$, vale:

$\boldsymbol{P_n = \pm\sqrt{(a_1 \bullet a_n)^n}}$ (para determinar el signo ha de estudiarse cada caso en concreto)

Ejemplo.- El segundo término de una progresión geométrica es 2 y la razón –2. Calcula el producto de los siete primeros términos.

$a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow 2 = a_1 \cdot (-2) \Rightarrow a_1 = -1$;

$a_7 = a_1 \cdot r^6 = (-1) \cdot (-2)^6 = -64$;

Observa que los siete primeros términos de esta progresión son –1, 2, –4, 8, –16, 32, –64, …

Por tanto, $P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{[(-1)\cdot(-64)]^7} = \sqrt{64^7} = \left(\sqrt{64}\right)^7 = 8^7 = 2.097.152$

EJERCICIOS

28. Multiplica los veinte primeros términos de la progresión geométrica 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, …
29. Calcula el producto de los siete primeros términos de la progresión geométrica 1, –2, 4, –8, …
30. Halla el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica, si el término central vale 2.

6.4. Suma de términos consecutivos

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una progresión geométrica de razón r y hallemos la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Para ello, multiplicamos por la razón r ambos miembros y obtenemos:

$$r\,S_n = a_1\,r + a_2\,r + a_3\,r + \ldots + a_{n-2}\,r + a_{n-1}\,r + a_n\,r = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n\,r$$

Restamos esta expresión a la primera igualdad:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc}
r\,S_n & = & & & & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n & + \; a_n\,r \\
S_n & = & & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n & \\
\hline
r\,S_n - S_n & = & - & a_1 & & & & & & & & & & & & & + \; a_n\,r
\end{array}$$

Operando obtenemos: $r\,S_n - S_n = -a_1 + a_n\,r \Rightarrow (r-1)\,S_n = a_n\,r - a_1 \Rightarrow S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r-1}$

Teniendo en cuenta que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, la expresión anterior queda:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r-1}$$

La suma de los $\boldsymbol{n}$ primeros términos de una progresión geométrica, $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$, vale:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_n\,r - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}}\text{, } \textbf{si } \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{σ}\ \textbf{1}$$

Ejemplo.- Sabiendo que en una progresión geométrica los términos $a_1 = 3$ y $a_5 = 1.875$, halla la suma de los cinco primeros términos.

Hallemos, previamente, la razón: $a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 1.875 = 3 \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = 625 \Rightarrow r = \sqrt[4]{625} = \pm 5$

Tenemos, por tanto, dos posibilidades:

Si $r = 5$, dichos términos son: 3, 15, 75, 375, 1.875 $\Rightarrow$ $S_5 = \dfrac{3\cdot(5^5-1)}{5-1} = \dfrac{3\cdot 3.124}{4} = 2.343$

Si $r = -5$, los términos son: 3, –15, 75, –375, 1.875 $\Rightarrow$ $S_5 = \dfrac{3\cdot[(-5)^5-1]}{-5-1} = \dfrac{3\cdot(-3.126)}{-6} = 1.563$

EJERCICIOS

31. El tercer término de una progresión geométrica es 12 y la razón 2. Calcula la suma de los diez primeros términos.
32. Calcula las sumas de los números que se indican.
    a) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{10}$
    b) De los 10 primeros términos de la sucesión 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, …
    c) De los 20 primeros términos de la sucesión 1, –1/4, 1/16, –1/64, 1/256, …
33. Si hoy me das 1 céntimo de euro, mañana 2, pasado 4, al siguiente día 8, y así sucesivamente, ¿cuántos euros me habrás dado al cabo de un mes?
34. Una motocicleta de gran cilindrada costó inicialmente 15.020 euros. Al cabo de un año se vendió por la mitad de su precio, pasado otro año se volvió a vender a la mitad del último precio, y así sucesivamente.
    a) ¿Cuánto le costo la motocicleta al quinto propietario? ¿Y al décimo?
    b) ¿Qué cantidad pagaron entre los seis primeros propietarios? ¿Y entre los diez primeros?
35. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

6.5. Suma infinitos términos si $-1 < r < 1$

La relevancia de este apartado es que se trata de sumar todos los términos de la progresión y no sólo una parte de ellos.

Partiendo de la fórmula $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ donde $-1 < r < 1$, a medida que n se va haciendo muy grande la potencia r^n se va haciendo cada vez más pequeña en valor absoluto (tiende a cero), de manera que se puede despreciar.

Sirva de muestra los siguientes ejemplos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0'25 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0'25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0'125 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0'125$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0'0625 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0'0625$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0'03125 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} = -0'03125$$

$2 \quad 32$

$\vdots$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1.048.576} = 0'000000953\ldots$$

$2 \quad 32$

$\vdots$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1.048.576} = 0'000000953\ldots$$

Si el número de términos *n* es infinito, se tiene entonces:

$$S_\infty = \frac{a_1(r^\infty - 1)}{r-1} = \frac{a_1(0-1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica con razón $-1 < r < 1$ vale:

$$\boldsymbol{S_\infty = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots = \frac{a_1}{1-r}, \text{ si } -1 < r < 1}$$

Ejemplo.- Halla la suma de los términos de la progresión geométrica ilimitada 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, …

En esta progresión, $a_1 = 8$ y $r = 1/2$;

como $-1 < r < 1$, la suma de todos sus términos vale: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{8}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

-